ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1993

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : *Ce sujet comporte 3 pages de texte.*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.
On note Id_E l'identité de E et θ_E l'application nulle de E dans E.

Si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n d'éléments de $\mathbb{K}$.

On note $E_{i,j}$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne, qui vaut 1.
On rappelle que $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $M = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle trace de M et on note Tr(M) le scalaire $\sum_{i=1}^{i=n} m_{ii}$.

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices diagonales

(*ie* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ et $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $i\neq j \Rightarrow m_{ij} = 0\}$).

Première partie

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall x \in E$, $\{x,u(x)\}$ est une partie liée.

   a. Démontrer l'existence d'une application λ de E dans $\mathbb{K}$ telle que : $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda(x)x$.

   b. Soit x et y deux éléments non nuls de E, démontrer que si la partie $\{x,y\}$ est liée alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.

   c. Soit x et y deux éléments non nuls de E, démontrer que si la partie $\{x,y\}$ est libre alors $\lambda(x) = \lambda(y)$. (On pourra considérer $u(x+y)$).

   d. En déduire l'existence d'un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in E\text{-}\{0\}$, $\lambda(x) = \lambda_0$.

   e. En déduire que u est une homothétie vectorielle.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, démontrer que si u n'est pas une homothétie vectorielle il existe un élément x de E tel que la partie $\{x,u(x)\}$ soit libre.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u est une homothétie vectorielle ; (on pourra considérer $x \in E$ tel que $\{x,u(x)\}$ soit partie libre et prendre pour v une des projections de E sur la droite vectorielle engendrée par x).

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$. Démontrer l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Deuxième partie

1. a. Démontrer que l'application Tr de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui à un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa trace est une forme linéaire.

   b. Calculer $\dim(Ker(Tr))$.

   c. Démontrer que : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Tr(MN) = Tr(NM)$.

2. a. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, démontrer que si M et N sont semblables alors $Tr(M) = Tr(N)$.

   b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, $M_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $M_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(u)$. Démontrer que : $Tr(M_1) = Tr(M_2)$.

Dans la suite on note $Tr(u)$ *le scalaire* $Tr(Mat_{\mathcal{B}}(u))$, *indépendant de* $\mathcal{B}$.

3. a. Soit ϕ une forme linéaire définie sur $\mathcal{L}(E)$, démontrer l'existence d'une application linéaire f élément de $\mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\phi(u) = Tr(f \circ u)$; (on pourra introduire la forme linéaire ϕ_1 définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi_1(M) = \phi(u)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$ est telle que $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et considérer la base $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Dans la suite on note ϕ_f *l'application de* $\mathcal{L}(E)$ *dans* $\mathbb{K}$ *qui à* u *associe* $Tr(f \circ u)$.

   b. Démontrer que : $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $\phi_f = \phi_g \Rightarrow f = g$.

   c. En déduire que l'application Φ de $\mathcal{L}(E)$ dans son dual qui à f associe ϕ_f est un isomorphisme.

4. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\phi = \phi_f$; on suppose de plus que : $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ $\phi(u \circ v) = \phi(v \circ u)$.

   a. Démontrer que : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ u = u \circ f$.

   b. En déduire l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda Id_E$.

   c. En déduire l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda Tr$.

Troisième partie

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)\text{-}\{\theta_E\}$ telle que $Tr(u) = 0$.

   a. Démontrer que u n'est pas une homothétie vectorielle.

   b. Soit x un élément de E tel que la partie $\{x,u(x)\}$ soit libre ; Δ_x la droite vectorielle engendrée par x, F un supplémentaire de Δ_x contenant u(x), p_F la projection sur F parallèlement à Δ_x et $v \in \mathcal{L}(F)$ définie par :
   $\forall y \in F$, $v(y) = p_F \circ u(y)$.
   Démontrer que $Tr(v) = 0$.

   c. En déduire par récurrence sur la dimension de E l'existence d'une base $\mathcal{B}_1$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

2. Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $(\alpha_1,\text{—},\alpha_n)$ ses coefficients diagonaux et Ψ_D l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Psi_D(M) = DM - MD$.

   a. Démontrer que Ψ_D est une application linéaire et déterminer son noyau.

   b. Démontrer que $Ker(\Psi_D) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si les α_i $(1 \le i \le n)$ sont deux à deux distincts. Dans ce cas démontrer que :
   $Im(\Psi_D) = \{(m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ m_{ii} = 0\}$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ déduire de ce qui précède la propriété suivante :
   $Tr(u) = 0 \iff \exists (v,w) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $u = v \circ w - w \circ v$.